

ТЕОРЕМА ТИПА ХИНЧИНА ДЛЯ СЛУЧАЯ РАСХОДИМОСТИ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.В. Луневич¹, А.С. Кудин¹, Н.В. Шамукова²

¹Институт математики НАН Беларуси, Сурганова 11, 220072 Минск, Беларусь
kifeislife@gmail.com, kunixd@gmail.com

²Командно-инженерный институт МЧС РБ, Машиностроительная 25, 220118 Минск, Беларусь
shamukova_n@mail.ru

В 1924 году А.Я. Хинчин [1] доказал замечательную теорему, ставшую основой для многих задач метрической теории чисел. Пусть $\Psi(H)$ – положительная монотонно убывающая функция, определенная на \mathbb{R}_+ и $I \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал. Множество точек $x \in I$, для которых существует бесконечно много решений $p, q \in \mathbb{Z}$ неравенства $|qx - p| < \Psi(q)$, обозначим как $\mathcal{L}_1(\Psi)$. Теорема Хинчина гласит, что $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = 0$, если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, и $\mu(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \mu(I)$ в противном случае.

По аналогии обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество точек $x \in I$, для которых существует бесконечно много решений неравенства $|P(x)| < H(P)^{-n+1} \Psi(H(P))$ в целочисленных полиномах P степени не более n . При $\Psi(H) = H^{-\lambda}$, ($\lambda \leq 1$) несложно доказать, используя принцип ящиков Дирихле, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(I)$. В 1932 году Малер [2] выдвинул гипотезу, что $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$ при $\Psi(H) = H^{-\lambda}$, ($\lambda > 1$). В 1964 году гипотеза Малера была доказана Спринджуком [3]. В 1966 году Бейкер доказал, что если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, то для почти всех $x \in \mathbb{R}$ неравенство $|P(x)| < \Psi^n(H(P))$ имеет не более чем конечное число решений в целочисленных полиномах P степени не более n , а также предположил, что для $\mathcal{L}_n(\Psi)$ справедлива теорема типа Хинчина, а именно, $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = 0$ если $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) < \infty$, и $\mu(\mathcal{L}_n(\Psi)) = \mu(I)$ в противном случае. Эта гипотеза в случае сходимости была доказана Берником, а в случае расходимости – Бересневичем. Аналогичные результаты были получены в полях комплексных и p -адических чисел Берником, Васильевым и Ковалевской.

В данной работе мы рассматриваем теорему типа Хинчина в случае расходимости в пространстве \mathbb{R}^3 . Отметим, что Берником, Бударинной и Дикинсон получен аналог теоремы Хинчина в случае расходимости в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. Пусть $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ и $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ – векторы с действительными координатами, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} v_i > 0, \lambda_i > 0, i = 1, 2, 3, \\ v_1 + v_2 + v_3 = n - 3, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1. \end{cases}$$

Определим через $\mathcal{L}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}}$ множество точек $(x_1, x_2, x_3) \in I = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{2})^3$, для которых существует бесконечно много неприводимых полиномов P степени ровно n , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} |P(x_1)| < H(P)^{-v_1} \Psi^{\lambda_1}(H(P)), \\ |P(x_2)| < H(P)^{-v_2} \Psi^{\lambda_2}(H(P)), \\ |P(x_3)| < H(P)^{-v_3} \Psi^{\lambda_3}(H(P)). \end{cases}$$

В данной работе доказана следующая

Теорема. Если $n \geq 3$ и $\sum_{h=1}^{\infty} \Psi(h) = \infty$, то $\mu(\mathcal{L}_{\mathbf{v}, \boldsymbol{\lambda}}) = \mu(I)$.

В ходе доказательства теоремы мы доказываем регулярность системы точек сопряженных действительных алгебраических чисел степени ровно n .

Литература

1. Khintchine A. *Einige Satze uber Kettenbruche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen* // Math. Ann. 1924. Vol. 92. Issue 1–2. P. 115–125.
2. Mahler K. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, Teil I* // J. Reine Angew. Math. 1932. Vol. 166. P. 118–150.
3. Спринджук В.Г. *Проблема Малера в метрической теории чисел*. Минск: Наука и Техника, 1967.